

## 一、项目名称

非线性期望下的倒向随机微分方程及其应用

## 二、申报奖种

自然科学奖

## 三、推荐单位

山东大学

## 四、项目简介

成果所属领域：概率论与数理统计—随机微分方程、随机控制与金融数学

倒向随机微分方程是彭实戈和 Pardoux 于 1990 年提出的一个新的研究领域，近年来成果丰富，并与拟线性偏微分方程的概率表示、随机控制、金融衍生产品的定价和风险度量等理论有着密切的联系。非线性期望理论作为经典概率论的推广，是在概率模型本身还无法确定的情形下，能对各种风险进行稳健的定量分析和计算的数学理论。本项目在非线性期望框架下推广了经典的倒向随机微分方程理论，并将这一新的理论应用到随机优化和投资组合优化等领域中。重要科学发现和研究成果包括：

**(1) 非线性期望下的倒向随机微分方程理论：**建立  $G$ -布朗运动驱动下的倒向随机微分方程的基本理论。在得到了  $G$ -布朗运动驱动下的线性倒向随机微分方程的显式解的基础上，证明了比较定理、全非线性 Feynman-Kac 公式和 Girsanov 变换等基础结果。得到的比较定理和 Girsanov 变换是研究波动率不确定环境下的资本资产定价、稳健投资策略和风险监控的有力工具；得到的全非线性 Feynman-Kac 公式建立起  $G$ -布朗运动驱动下的倒向随机微分方程的解和一类全非线性偏微分方程的解之间的内在联系，不仅在理论上是重要的，其结果还可以导出偏微分方程的解的 Monte-Carlo 形式的新的计算方法。

**(2)  $G$ -期望的表示定理和  $G$ -期望空间的刻画：**把概率论中的 Kolmogorov 方法推广到次线性数学期望下，得到了  $G$ -期望的表示定理。证明了  $G$ -期望空间中的元素是拟必然连续的，并给出了其元素的充分必要刻画。使用偏微分方程的

技术和 Krylov 估计，揭示出  $G$ -期望空间包含足够多的示性函数，从而可以通过简单随机变量（随机过程）逼近拟连续随机过程（随机变量）。 $G$ -期望的表示定理以及由其推导出的容度语言、 $G$ -期望空间中元素的刻画和随机变量序列的收敛定理为进一步研究  $G$ -期望的性质提供了基础的工具。

**(3)  $G$ -期望下的随机优化问题：**在  $G$ -期望空间下，研究了随机递归最优控制问题，该控制问题的目标泛函被一个  $G$ -布朗运动驱动下的倒向随机微分方程的解所刻画。通过拟线性化和弱收敛方法解决了  $G$ -期望的非可加性，得到了随机最大值原理，并进一步的研究了随机线性二次最优控制问题。随机最大值原理是研究随机最优控制的基础工具，我们的结果在波动率不确定情形下的经济和金融优化问题中有很好的理论和应用前景。

**(4) 倒向终端摄动方法及其在金融中的应用：**提出了“倒向随机微分方程终端摄动方法”，是一种全新的变分方法，克服了财富方程非线性和投资策略带有复杂约束条件的难点。在不完全市场下的最优投资组合选择、风险度量领域有广泛的应用。为金融市场中最优财富和投资策略的计算、金融风险的度量和防控提供了有力的工具。

项目组的 8 篇代表性论文的 SCI 他引数为 82 次，49 篇部相关论著的 SCI 他引数为 384 次。项目完成人多次应邀在重要的国际学术会议上作邀请报告。项目第一完成人 2011 年入选教育部新世纪优秀人才支持计划。

## 五、主要完成人情况表

1、姓名：嵇少林                      排名：1                      技术职称： 教授

工作单位：山东大学

完成单位：山东大学

对本项目技术创造性贡献：嵇少林为代表性论著 [1、3、4、5、6] 的通讯作者，[5、6] 的第一作者合作论文遵照国际数学界惯例按作者姓名的字母顺序署名。嵇少林对推荐书中所列的科学发现均作出了实质性贡献。

曾获科技奖励情况：无

2、姓名：胡明尚          排名：2          技术职称： 教授

工作单位：山东大学

完成单位：山东大学

对本项目技术创造性贡献：胡明尚为代表性论著[8]的通讯作者，[1、2、3、4、7、8]的第一作者。合作论文遵照国际数学界惯例按作者姓名的字母顺序署名。

胡明尚对推荐书中所列的科学发现均作出了实质性贡献。

曾获科技奖励情况：无

## 六、代表性论文专著目录

[1]Mingshang Hu;Shaolin Ji;Shige Peng;Yongsheng Song. Comparison theorem, Feynman-Kac formula and Girsanov transformation for BSDEs driven by G-Brownian motion. *STOCHASTIC PROCESSES AND THEIR APPLICATIONS*. 2014(124):1170-1195.

[2] Mingshang Hu; Shige Peng. On representation theorem of G-expectations and paths of G-Brownian motion. *ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA-ENGLISH SERIES*. 2009(25):539-546.

[3] Mingshang Hu;Shaolin Ji. Stochastic maximum principle for stochastic recursive optimal problem under volatility ambiguity. *SIAM JOURNAL ON CONTROL AND OPTIMIZATION*. 2016(54):918-945.

[4] Mingshang Hu;Shaolin Ji;Shuzhen Yang. A stochastic recursive optimal control problem under G-expectation framework. *APPLIED MATHEMATICS AND OPTIMIZATION*. 2014(70):253-278.

[5] Shaolin Ji;Shige Peng. Terminal perturbation method for the backward approach to continuous time mean-variance portfolio selection. *STOCHASTIC PROCESSES AND THEIR APPLICATIONS*. 2008(118):952-967.

[6] Shaolin Ji. Dual method for continuous-time Markowitz' s problems with nonlinear wealth equations. *JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS*. 2010(366):90-100.

[7] Mingshang Hu;Falei Wang;Guoqiang Zheng. Quasi-continuous random variables and processes under the G-expectation framework. *STOCHASTIC PROCESSES AND THEIR APPLICATIONS*. 2016(126):2367-2387.

[8] Mingshang Hu. On the integral representation of g-expectations. *COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE*. 2010(348), 571 - 574.